

ПОГРУЖЕНИЯ S^1 (И ГРАФОВ) В ПОВЕРХНОСТИ

С. А. МЕЛИХОВ

АННОТАЦИЯ. Получена классификация погружений f из S^1 в 2-многообразие M в терминах элементарных инвариантов: чётности $S(f)$ числа двойных точек самотрансверсальной C^1 -аппроксимации f и числа вращения $T(f')$ погружения $f': S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

А именно, погружения $f, g: S^1 \rightarrow M$ регулярно гомотопны, если и только если они гомотопны, и если $M = S^2$ или $\mathbb{R}P^2$ или нормальное раслоение $\nu(f)$ неориентируемо, то $S(f) = S(g)$; а если $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$ и $\nu(f), \nu(g)$ имеют ориентации o, o' , согласованные относительно гомотопии, то $T(\varphi_o \bar{f}) = T(\varphi_{o'} \bar{g})$, где \bar{f} — поднятие f на накрытие M_f многообразия M , соответствующее $\langle [f] \rangle \subset \pi_1(M)$, а φ_o — стандартное вложение ориентированного кольца M_f in \mathbb{R}^2 .

В действительности, для гомотопных погружений f, g как $S(f) - S(g)$ так и $T(\varphi_o \bar{f}) - T(\varphi_{o'} \bar{g})$ сводятся к числу вращения поднятия нульгомотопного погружения $f \# g^*$ на универсальное накрытие M .

Выше “погружения” $S^1 \rightarrow M$ — гладкие либо топологические; приводится теорема сглаживания, показывающая, что разницы нет. Также получена классификация погружений графа в M с точностью до регулярной гомотопии в терминах инвариантов $S(f)$ и $T(\varphi_o \bar{f})$ погруженных окружностей. Доказательства основаны на h-принципе.

Смысл данной нехитрой заметки — в упрощении [2] и [3], где получена классификация погружений графа в $M \neq \mathbb{R}P^2$ в терминах весьма трудоёмко определяемого “числа вращения” пары гомотопных погружений $S^1 \rightarrow M$ (а не одного погружения) по отношению к заданному векторному полю с нулями на M .

1. ПОГРУЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

Под *погружением* полиэдра в многообразие мы понимаем непрерывное отображение, которое при ограничении на достаточно малую окрестность всякой точки является вложением (т.е. гомеоморфизмом на свой образ). В частности, погружением является всякое *гладкое погружение* между гладкими многообразиями — дифференцируемое отображение, имеющее инъективный дифференциал в каждой точке. (*Гладкая*) *регулярная гомотопия* — это такая гомотопия $f: Y \times I \rightarrow X$, что отображение $Y \times I \rightarrow X \times I$, $(y, t) \mapsto (f(y), t)$ — (гладкое) погружение.

Под *поверхностью* мы понимаем 2-многообразие без края (возможно, неориентируемое и некомпактное). Несложно показать (см. §3), что всякое погружение из S^1 в поверхность M регулярно гомотопно гладкому погружению, а регулярно гомотопные гладкие погружения $S^1 \rightarrow M$ соединяются гладкой регулярной гомотопией.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Число вращения $T(f)$ гладкого погружения $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — это число полных оборотов касательного вектора. Оно очевидно инвариантно при гладкой регулярной гомотопии, поэтому в силу сказанного выше определено и для произвольного погружения $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и является инвариантом регулярной гомотопии. Число вращения $T(f)$ погружения $f: S^1 \rightarrow S^2$ — это класс вычетов по модулю 2, определяемый с помощью стереографической проекции: легко видеть, что при проходе погруженной окружности через бесконечность её число вращения меняется на двойку.

Самопересечённость $s(f)$ самотрансверсального гладкого погружения f из S^1 в поверхность M — это класс вычетов по модулю 2, противоположный чётности числа двойных точек f . Она очевидно инвариантна при самотрансверсальной регулярной гомотопии, поэтому в силу мульти-0-струйной теоремы трансверсальности определена и для произвольного погружения $S^1 \rightarrow M$ и является инвариантом регулярной гомотопии. (В действительности, $s(f)$ инвариантна и при регулярном бордизме, но нам это не потребуется.) Как заметил Уитни (см. [6], [7]), для погружений в плоскость $s(f)$ равна чётности $T(f)$; следовательно, для погружений в сферу $s(f) = T(f)$.

Если задано нульгомотопное погружение f из окружности в ориентированную поверхность M , назовём его (ориентированным) числом вращения $T(f)$ число вращения какого-нибудь поднятия \tilde{f} на универсальное накрытие \tilde{M} . (Два разных поднятия \tilde{f} совмещаются сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом, который изотопен тождественному и, следовательно, сохраняет число вращения.) Для нульгомотопного погружения f окружности в произвольную поверхность аналогичное (неориентированное) число вращения $t(f)$ корректно определено по модулю 2, поскольку поднятия \tilde{f} на универсальное накрытие совмещаются гомеоморфизмом и, следовательно, имеют одинаковую самопересечённость. Очевидно, оба этих числа вращения являются инвариантами регулярной гомотопии.

Лемма 1.1. Для нульгомотопного погружения f из S^1 в поверхность $t(f) = s(f)$.

Доказательство. Образ поднятия \tilde{f} погружения на универсальное накрытие \tilde{M} можно затащить в сколь угодно малый шар B объемлющей изотопией H_t многообразия \tilde{M} (т.е. $H_0 = \text{id}$, $H_1\tilde{f}(S^1) \subset B$). Если B достаточно мал, ограничение проекции $p: \tilde{M} \rightarrow M$ на B будет гомеоморфизмом. Поэтому для погружения $f' := pH_1\tilde{f}$ неориентированное число вращения $t(f')$ равно его самопересечённости $s(f')$. Но и первое, и вторая не меняются при регулярной гомотопии $pH_t\tilde{f}$ между f и f' . \square

1.1. Ориентированный случай. Пусть f — погружение из окружности в ориентированную поверхность M , не являющееся нульгомотопным. Рассмотрим поднятие \tilde{f} отображения f на накрытие M_f поверхности M , соответствующее подгруппе $\pi_1(M)$, порождённой $[f]$. (В качестве базисной точки M берётся образ базисной точки S^1 .) Поскольку $\pi_1(M_f)$ конечно порождена, M_f гомеоморфна замкнутой поверхности с конечным числом проколов. Поскольку M ориентируема, M_f также ориентируема, значит, M_f гомеоморфна сфере с ручками и проколами. Поскольку $\pi_1(M)$ — циклическая, M_f гомеоморфна кольцу.

Поскольку M ориентирована, на M_f тоже имеется ориентация o , которая однозначно задаёт сохраняющее ориентацию погружение φ_o этого кольца в плоскость (ориентированную стандартным образом), при котором средняя линия кольца погружается стандартным погружением “восьмёрка”, имеющем число вращения 0. В этом случае можно говорить о *числе вращения* $T(f)$ погружения f , определённом как $T(\varphi_o \bar{f})$. Это число вращения очевидно является инвариантом регулярной гомотопии f .

Легко видеть, что для f , не являющегося нульгомотопным, $T(f)$ меняет знак при смене ориентации M (это соответствует переворачиванию погруженного кольца, при котором завитки погружения \bar{f} меняют знак) и остаётся неизменным при смене ориентации S^1 (которая реализуется композицией переворачивания кольца и зеркальной симметрии плоскости, которая тоже обращает знаки завитков). Заметим, что эти свойства симметрии подпортились бы, если бы вместо погружения “восьмёрка” мы взяли одно из стандартных вложений (с числом вращения 1 или -1), что и объясняет наш выбор.

А для нульгомотопного f , так же как и для всякого погружения $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, знак $T(f)$ меняется как при смене ориентации M , так и при смене ориентации S^1 .

Теорема 1.2. *Если $T(f) = T(g)$ для гомотопных погружений f, g из окружности в ориентированную поверхность, то f и g регулярно гомотопны.*

Более того, если заданная гомотопия неподвижна на некоторой дуге окружности, то и регулярную гомотопию можно выбрать неподвижной на ней.

Доказательство. Первое утверждение сводится ко второму, т.к. используя заданную гомотопию, несложно построить регулярную гомотопию от f к f' , совпадающему с g на заданной дуге J и гомотопному g неподвижно на ней. Второе утверждение достаточно доказать для случая $M = M_f$, поскольку гомотопия между f и g поднимается до гомотопии между \bar{f} и \bar{g} , а регулярная гомотопия между \bar{f} и \bar{g} проектируется в регулярную гомотопию между f и g , причём все гомотопии можно считать неподвижными на J . Наконец, утверждение достаточно доказать для гладких погружений, а для них оно согласно h -принципу (см. [4], [11], [12]) сводится к тому, что если $T(f) = T(g)$, погружения f, g имеют фиксированное значение x и фиксированное направление $v \in S_x M$ в базисной точке $1 \in S^1$ и задают один и тот же элемент в $\pi_1(M, x)$, то их сферизованные дифференциалы sf, sg задают один и тот же элемент в $\pi_1(SM, v)$. Случай $M = S^2$ сводится к случаю $M = \mathbb{R}^2$, т.к. если для погружений в проколотую сферу $T(f) - T(g)$ чётно, легко построить регулярную гомотопию в сфере от f к погружению f' в проколотую сферу с $T(f') = T(g)$. Значит, можно считать, что M — плоскость или кольцо, в частности, параллелизуемо. Тогда сферизация касательного расслоения $SM \cong M \times S^1$, и $\pi_1(SM, v) \simeq \pi_1(M, x) \times \mathbb{Z}$. Первая координата $[sf] \in \pi_1(SM, v)$ — это $[f] \in \pi_1(M, x)$, а вторая — это $T(f)$. Поскольку $[f] = [g]$ и $T(f) = T(g)$, утверждение доказано. \square

1.2. Оснащённый случай. *Оснащением погружения f из S^1 в поверхность M называется выбор ориентации (\Leftrightarrow тривиализации) в нормальном расслоении $\nu(f)$.*

Таким образом, у всякого f с ориентируемым $\nu(f)$ есть ровно два оснащения, а если $\nu(f)$ неориентируемо — то ни одного. Погружение с выбранным оснащением называется *оснащённым погружением*.

Всякое оснащённое погружение $F = (f, \Xi)$ из окружности в поверхность M имеет оснащённое поднятие $(\bar{f}, \bar{\Xi})$ на накрытие M_f (если f нульгомотопно, определение M_f тоже имеет смысл и даёт универсальное накрытие). Поскольку M_f ориентируемо, $\bar{\Xi}$ задаёт его ориентацию o . Поэтому определено *число вращения* $T(F) := T(\varphi_o \bar{f})$ (в случае, если M_f — универсальное накрытие, в качестве φ_o берётся $\text{id}: M_f \rightarrow M_f$). Заметим, что если M неориентируемо, а на его ориентирующем накрытии \hat{M} зафиксирована ориентация, то F имеет однозначное оснащённое поднятие $(\hat{f}, \hat{\Xi})$ на \hat{M} , сохраняющее ориентацию, и $T(F) = T(\hat{f})$.

Два гомотопных оснащённых погружения F, G называются *оснащённо гомотопными*, если локальные ориентации поверхности, задающие выбранные оснащения, совмещаются заданной гомотопией. *Оснащённая регулярная гомотопия* — это просто регулярная гомотопия, являющаяся оснащённой гомотопией. Очевидно, $T(F)$ является инвариантом оснащённой регулярной гомотопии.

Поскольку оснащённая гомотопия поднимается на ориентирующее накрытие, теорема 1.2 имеет

Следствие 1.3. *Если $T(F) = T(G)$ для оснащённо гомотопных оснащённых погружений F, G из S^1 в поверхность, то F и G оснащённо регулярно гомотопны.*

Более того, если заданная гомотопия неподвижна на некоторой дуге окружности, то и регулярную гомотопию можно выбрать неподвижной на ней.

Из свойств $T(f)$ следует, что $T(f, -\Xi) = -T(f, \Xi)$ и $T(f^*, \Xi^*) = T(f, \Xi)$, где f^* обозначает f , “пройденное в обратную сторону”, т.е. предварённое комплексным сопряжением в $S^1 \subset \mathbb{C}$, а его оснащение Ξ^* имеет ту же ориентацию тотального пространства, что и Ξ , но противоположную ориентацию слоёв.

Замечание 1.4. (а) Если $M = S^2$ или $\mathbb{R}P^2$, то $T(f, \Xi)$ — класс вычетов по модулю 2, и из соотношения $T(f, -\Xi) = -T(f, \Xi)$ следует, что $T(f, \Xi)$ не зависит от выбора Ξ . Более того, для $M = S^2$ или $\mathbb{R}P^2$ из ориентируемости $\nu(f)$ следует нульгомотопность f , откуда по определению $T(f, \Xi) = t(f)$; а по лемме 1.1 $t(f) = s(f)$.

(б) Если $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$, то из соотношения $T(f, -\Xi) = -T(f, \Xi)$ следует, что абсолютная величина $|T(f, \Xi)|$ не зависит от выбора Ξ , и стало быть является инвариантом погружения f с ориентируемым $\nu(f)$. Обозначим её через $T_+(f)$.

(в) Если $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$ и оснащённое погружение (φ, Ξ) гомотопно $(\varphi, -\Xi)$, то для погружений f и g , гомотопных φ , из $T_+(f) = T_+(g)$ следует, что f и g регулярно гомотопны. В самом деле, из $T_+(f) = T_+(g)$ следует, что $T(f, \Xi_f) = T(g, \Xi_g)$ для некоторых Ξ_f и Ξ_g , но в силу нашего предположения произвольные оснащения f и g совмещаются некоторой гомотопией, и утверждение вытекает из следствия 1.3.

(г) Допустим теперь, что оснащённое погружение $\Phi := (\varphi, \Xi)$ не гомотопно $(\varphi, -\Xi)$. Тогда для любого погружения f , гомотопного φ , можно однозначно выбрать оснащение Ξ_f , такое что (f, Ξ_f) гомотопно Φ . Следовательно, определён инвариант

$T_\Phi(f) := T(f, \Xi_f)$ (хотя он и не определён канонически, т.к. зависит от выбора оснащённого погружения Φ). Согласно следствию 1.3 погружения f, g , гомотопные φ , регулярно гомотопны друг другу, если и только если $T_\Phi(f) = T_\Phi(g)$.

Пример 1.5. (а) Если погружение $f: S^1 \rightarrow M$ нульгомотопно, то (f, Ξ) оснащённо гомотопно (f^*, Ξ^*) . Если дополнительно M неориентируемо, то протащив f вдоль какого-нибудь листа Мёбиуса, лежащего в M , мы получим оснащённую регулярную гомотопию от (f^*, Ξ^*) к $(f, -\Xi)$. В результате получается оснащённая гомотопия h_t от (f, Ξ) к $(f, -\Xi)$.

(б) Пример ненульгомотопного погружения f , для которого (f, Ξ) оснащённо гомотопно $(f, -\Xi)$, доставляется вложением в M края какого-нибудь листа Мёбиуса, лежащего в M . Например, такой вид имеет вложение двулистного накрытия над S^1 в расслоение бутылки Клейна над S^1 .

(в) Пример погружения f , для которого (f, Ξ) оснащённо гомотопно $(f^*, -\Xi^*)$, но не $(f, -\Xi)$, даётся слоем расслоения бутылки Клейна над S^1 .

Предложение 1.6. *Оснащённое пунктированное погружение (f, Ξ) из S^1 в M гомотопно $(f, -\Xi)$ если и только если $[f] = [g]^n \in \pi_1(M)$ для некоторого пунктированного погружения $g: S^1 \rightarrow M$ с неориентируемым $\nu(g)$.*

Доказательство. Всякая гомотопия $h: S^1 \times I \rightarrow M$ погружения f с самим собой поднимается на ориентирующее накрытие \hat{M} (по теореме о накрывающей гомотопии), причём h является оснащённой гомотопией между (f, Ξ) и $(f, -\Xi)$, если и только если отображение тора $h': S^1 \times (I/\partial I) \rightarrow M$, через которое пропускается h , не поднимается на \hat{M} . Неподнимаемость h' на \hat{M} в свою очередь равносильна тому, что образ $\pi_1(S^1 \times S^1)$ не лежит в образе $\pi_1(\hat{M})$. Поскольку $[f] \in \pi_1(M)$ лежит в образе $\pi_1(\hat{M})$, последнее условие равносильно тому, что $[f]$ коммутирует с некоторым элементом $\alpha \in \pi_1(M)$, не лежащим в образе $\pi_1(\hat{M})$.

Если $[f] = [g]^n$, где $\nu(g)$ неориентируемо, то в качестве такого α можно взять $[g]$. Обратно, пусть элемент α задан. Рассмотрим накрытие \tilde{M} многообразия M , соответствующее подгруппе $\langle [f], \alpha \rangle \subset \pi_1(M)$. Поскольку $\pi_1(\tilde{M})$ конечно порождена, \tilde{M} гомеоморфно замкнутой поверхности с конечным числом проколов. Поскольку α лежит в образе $\pi_1(\tilde{M})$, но не лежит в образе $\pi_1(\hat{M})$, накрытие $\tilde{M} \rightarrow M$ не пропускается через \hat{M} , так что \tilde{M} неориентируемо. Поскольку $[f]$ коммутирует с α в $\pi_1(M)$, группа $\pi_1(\tilde{M})$ — абелева. Следовательно, \tilde{M} — проективная плоскость или лист Мёбиуса. Пусть $\tilde{g}: S^1 \rightarrow \tilde{M}$ — вложение, представляющее образующую $\pi_1(\tilde{M})$, и пусть $g: S^1 \rightarrow M$ — его композиция с накрытием $\tilde{M} \rightarrow M$. Поскольку $\nu(\tilde{g})$ неориентируемо, то и $\nu(g)$ неориентируемо. Поскольку $\pi_1(\tilde{M})$ — циклическая, поднятие $\tilde{f}: S^1 \rightarrow \tilde{M}$ погружения f пунктированно гомотопно композиции некоторого накрытия $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ и вложения \tilde{g} . Значит, и f пунктированно гомотопна φg . \square

1.3. Неоснащаемый случай. Если погружения $f, g: S^1 \rightarrow M$ имеют общую начальную точку $p = f(1) = g(1)$, и возникающее отображение букета $F: S^1 \vee S^1 \rightarrow M$ является погружением, назовём композицию погружения $\text{id}_{S^1} * \text{id}_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$,

задаваемого конкатенацией петель, и погружения F конкатенацией погружений f и g , и обозначим его $f \# g$.

Существует три комбинаторных типа конкатенации, представленные следующими тремя возможностями (но сами не требующие никакой трансверсальности):

- (I) f и g трансверсальны в p ;
- (II) $f \# g$ самотрансверсально в p ;
- (III) $f \# g^*$ самотрансверсально в p .

Лемма 1.7. *Если f и g гомотопны, то $s(f \# g) = s(f) + s(g) + w_1 \nu(f)$ для типов I, II и $s(f \# g) \neq s(f) + s(g) + w_1 \nu(f)$ для типа III.*

Здесь w_1 — класс Штифеля-Уитни, детектирующий ориентируемость расслоения.

Доказательство. Можно считать, что f и g трансверсальны везде, кроме быть может точки $p = f(1) = g(1)$, и самотрансверсальны во всех точках. Пусть \bar{f} , \bar{g} — трансверсальные аппроксимации f и g , а $\overline{f \# g}$ — самотрансверсальная аппроксимация $f \# g$; можно считать, что все изменения происходят только в малой окрестности точки p . Двойные точки $f \# g$ — это двойные точки f , двойные точки g и пересечения между f и g . В случае II точка p даёт одну двойную точку $\overline{f \# g}$, а в случаях I, III — ноль (или две). В случае I p даёт одно пересечение между \bar{f} и \bar{g} , а в случаях II, III — ноль (или два). Поэтому в случае III чётность числа двойных точек $\overline{f \# g}$ равна сумме чётностей чисел двойных точек f , двойных точек g и пересечений между \bar{f} и \bar{g} , а в случаях I, II — противоположна ей. Но чётность числа пересечений между \bar{f} и \bar{g} — это произведение классов когомологий по модулю 2, двойственных к одномерным классам гомологий, представленным \bar{f} и \bar{g} . Но это один и тот же класс (поскольку \bar{f} и \bar{g} гомотопны), и его квадрат в $H_c^2(M) \simeq H_c^2(\nu(f))$ переводится изоморфизмом Тома в $w_1 \nu(f)$. (На геометрическом языке: $w_1 \nu(f)$ есть класс Эйлера по модулю 2, так что он равен чётности числа нулей общего сечения $\nu(f)$.) \square

Если $f: S^1 \rightarrow M$ — гладкое погружение и $o: S^1 \rightarrow M$ — вложение на маленькую гладкую окружность, имеющую сонаправленное касание с f в точке $f(1) = o(1)$, будем говорить, что конкатенация $f \# o$ получена из f добавлением завитка; собственно завитком погружения $f \# o$ будем называть дугу $o(S^1 \setminus \{1\})$ его образа. Если M ориентировано или f оснащено, у завитка имеется знак, определяемый тем, с какой стороны от образа f он расположен.

Лемма 1.8. *Пусть f — вложение из S^1 в среднюю линию (= нулевое сечение) листа Мёбиуса M и пусть $\varphi: S^1 \rightarrow M$ — погружение, полученное из f 1) добавлением одного завитка, 2) репараметризацией, в результате которой $\varphi(1)$ попадает в завиток, и 3) регулярной гомотопией, возникающей под действием изотопии листа Мёбиуса с носителем в некоторой окрестности U замыкания завитка, в результате которой $\varphi(1)$ перемещается в $f(1)$ таким образом, что φ и f имеют в этой точке противоположное касание, причём других пересечений между φ и f внутри U нет. Тогда $[(sf^*)^*] = [s\varphi] \in \pi_1(SM, s\varphi(1))$.*

Доказательство несложно; заметим лишь, что при замене листа Мёбиуса на кольцо утверждение становится неверным.

Теорема 1.9. *Если $s(f) = s(g)$ для гомотопных погружений f, g из S^1 в поверхность, причём $\nu(f)$ неориентируемо, то f и g регулярно гомотопны.*

Более того, если заданная гомотопия неподвижна на некоторой точке окружности, то и регулярную гомотопию можно выбрать неподвижной на ней.

Доказательство. Как и в доказательстве 1.2, достаточно разобрать случай с неподвижной точкой p . Погружения f и g можно подправить регулярной гомотопией так, чтобы они стали гладкими, и чтобы точка p стала бы для них точкой сонаправленного касания, квадратичного в том смысле, что оно локально выглядит как касание графиков $y = x^2$ и $y = -x^2$ (а не $y = x^3$ и $y = -x^3$). Достаточно было бы показать, что сферизованный дифференциал sf пунктированно гомотопен sg , или, другими словами, что петля $sf \cdot (sg)^*$ нульгомотопна. Пусть h — гладкая аппроксимация погружения $f \# g^*$, регулярно гомотопная ему и дважды касающаяся f в точке p . Поскольку $\nu(f)$ неориентируемо, из леммы 1.8 следует, что sh пунктированно гомотопен $sf \cdot (sg)^*$. Поэтому было бы достаточно показать, что sh нульгомотопен.

Поскольку $\nu(f)$ неориентируемо и $s(f) = s(g) = s(g^*)$, по лемме 1.7 (для конкатенации типа III) $s(h) = 0$. Тогда по лемме 1.1 $T(h, \Xi)$ чётно для любого оснащения Ξ . Добавим к h чётное число завитков одного знака (знаки определяются выбором Ξ), так чтобы полученное оснащённое погружение имело $T(h', \Xi') = 0$. Тогда по следствию 1.3 h' регулярно гомотопна восьмёрке во вложенном диске, и в частности сферизованный дифференциал sh' нульгомотопен. Можно считать, что h' — сглаживание $f' \# g^*$, где f' получено из f добавлением чётного числа завитков, не задевающих точку p . Тогда sf' пунктированно гомотопен sg , и, значит, по h-принципу (см. [4], [11], [12]) f' регулярно гомотопна g , оставляя неподвижной точку p (и даже касательное направление в ней). С другой стороны, f' регулярно гомотопна f , поскольку половину завитков можно протащить регулярной гомотопией вдоль всего образа f , в результате чего они сменяют свой (локальный) знак и сократятся с оставшимися. Эту регулярную гомотопию можно подправить так, чтобы она оставляла неподвижной точку p (но, конечно, не касательное направление в ней). \square

Пример 1.10. Заменить в формулировке теоремы 1.9 “точку” на “дугу” не получится. Действительно, рассмотрим вложение f из S^1 в среднюю линию листа Мёбиуса, и пусть g — погружение, полученное из f добавлением пары завитков, не пересекающих какую-нибудь дугу J на образе f . Тогда $s(f) = s(g)$, но если бы f и g были регулярно гомотопны, оставляя неподвижной J , то конкатенация $f \# g^*$ была бы регулярно гомотопна $f \# f^*$. Но $T(f \# f^*, \Xi) = \pm 1$ в зависимости от выбора Ξ , тогда как при подходящем знаке завитков $T(f \# g^*, \Xi') = \pm 3$ в зависимости от выбора Ξ' , так что такой регулярной гомотопии не существует.

1.4. Основные результаты.

Следствие 1.11. Погружения f, g из S^1 в ориентированную поверхность регулярно гомотопны, если и только если f и g гомотопны и $T(f) = T(g)$.

Следствие 1.12. Погружения f, g из S^1 в поверхность M регулярно гомотопны, если и только если f и g гомотопны, причём

- если $\nu(f)$ ориентируемо, $T(f, \Xi_f) = T(g, \Xi_g)$ для каких-нибудь оснащений Ξ_f, Ξ_g , согласованных относительно какой-нибудь гомотопии между f, g ;
- если $\nu(f)$ неориентируемо, $s(f) = s(g)$.

Более того, условие согласованности однозначно задаёт Ξ_g по Ξ_f , если и только если $[f] \in \pi_1(M)$ не является степенью $[\varphi]$ с неориентируемым $\nu(\varphi)$; при неоднозначности оснащения Ξ_g его изменение выражается в смене знака $T(g, \Xi_g)$.

В случае $M = \mathbb{R}P^2$ формулировку следствия 1.12 можно упростить, поскольку всякое $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ либо имеет неориентируемое $\nu(f)$, либо нульгомотопно, причём в последнем случае $T(f, \Xi) = s(f)$ (см. замечание 1.4(a)):

Следствие 1.13. Погружения $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ регулярно гомотопны, если и только если f и g гомотопны и $s(f) = s(g)$.

Замечание 1.14. В недавней работе М. Ивашковского [1] получено другое доказательство следствия 1.13, основанное на сведении общего случая к конкретным примерам с использованием движений Райдемайстера. Автор узнал о результате Ивашковского из комментариев его научного руководителя Е. Кудрявцевой к приведённому выше доказательству следствия 1.12.

Замечание 1.15. Если погружения f и g пунктированно гомотопны и имеют в точке $f(1) = g(1)$ противоположные направления (чего легко достичь их пунктированной регулярной гомотопией), то погружение $f \# g^*$ нульгомотопно, и условия $T(f) = T(g)$, $T(f, \Xi_f) = T(g, \Xi_g)$ и $s(f) = s(g)$ можно эквивалентно переформулировать в виде $T(f \# g^*) = 0$, $T(f \# g^*, \Xi_f \# \Xi_g^*) = 0$ и $t(f \# g^*) = w_1 \nu(f)$, где T и t определены уже в терминах обычного числа вращения на универсальном накрытии. (Действительно, первое утверждение следует из того, что $T(f \# g^*)$ можно вычислить не только на универсальном накрытии, но и на накрытии M_f , где оно очевидно складывается из $T(f)$ и $-T(g)$, второе проверяется аналогично, а третье вытекает из леммы 1.1 и леммы 1.7 для типов I, II.)

Замечание 1.16. Для произвольных погружений f и g (вообще говоря, имеющих разные значения в точке 1) вместо конкатенации $f \# g^*$ определена *связная сумма* $f \#_p g^*$ вдоль погруженного пути $p: [a, b] \rightarrow M$, такого что $p(a) = f(1)$ и $p(b) = g(1)$, причём f, p и g вместе задают погружение $S^1 \cup_{1=a} I \cup_{b=1} S^1$ в M . Если f и g соединяются гомотопией h_t , и путь p гомотопен пути $h_t(1)$ по модулю концов, то связная сумма $f \#_p g^*$ нульгомотопна. Если f и g снабжены оснащениями Ξ_f и Ξ_g (что выполнено автоматически, если на M задана ориентация), то можно различить 4 типа связных сумм: $(++)$, $(+-)$, $(-+)$ и $(--)$, в зависимости от согласованности ориентации пути p с оснащениями Ξ_f и Ξ_g (понимаемыми здесь как ориентации

слоёв $\nu(f)$ и $\nu(g)$). Деление на *знакопеременные* $(+-$ и $-+)$ и *знакопостоянные* типы $(++$ и $--)$ имеет смысл и без выбора оснащений (и даже когда их не существует), если между f и g задана гомотопия h_t , поскольку в этом случае можно предполагать согласованность оснащений (если они существуют) относительно h_t или по крайней мере согласованность локальных ориентаций в точках $f(1)$ и $g(1)$ (которые можно понимать как локальные оснащения f и g в окрестностях этих точек) относительно пути $h_t(1)$. В этих предположениях легко видеть, что конкатенации $f \# g^*$ типов I и II (как в замечании 1.15) реализуются знакопеременными связными суммами, а типа III (как в доказательстве теоремы 1.9) — знакопостоянными. Прямые вычисления показывают, что не только в этих случаях, но и для произвольных знакопеременных связных сумм $T(f \#_p g^*) = T(f) - T(g)$, $T(f \#_p g^*, \Xi_f \#_p \Xi_g^*) = T(f, \Xi_f) - T(g, \Xi_g)$ и $t(f \#_p g) = s(f) - s(g) + w_1 \nu(f)$; а для любых знакопостоянных связных сумм $T(f \#_p g^*) = T(f) - T(g) \pm 1$, $T(f \#_p g^*, \Xi_f \#_p \Xi_g^*) = T(f, \Xi_f) - T(g, \Xi_g) \pm 1$ и $t(f \#_p g) \neq s(f) - s(g) + w_1 \nu(f)$. Здесь знак ± 1 зависит уже от конкретного типа связной суммы $(++$ или $--)$, причём конкатенациям типа III соответствует только один из двух знакопостоянных типов (какой именно — зависит от выбора ориентации M или согласованных оснащений).

2. ПОГРУЖЕНИЯ ГРАФОВ

Зафиксируем какой-нибудь остов T связного графа Γ (т.е. подграф Γ , являющийся деревом и содержащий все вершины Γ). Под *опорным циклом* Γ (относительно T) понимается единственный цикл любого подграфа графа Γ , полученного из T добавлением ровно одного ребра.

Теорема 2.1. *Пусть f, g — погружения связного графа Γ в ориентированную поверхность, гомотопные друг другу. Тогда f и g регулярно гомотопны, если и только если они задают одинаковые циклические порядки рёбер в вершинах Γ , и для каждого опорного цикла C выполнено $T(f|_C) = T(g|_C)$.*

Теорема 2.1 — непосредственное следствие теоремы 2.2 ниже.

Всякий элемент $\alpha \in H_1(\Gamma; \mathbb{Z}/2)$ представляется эйлеровым подграфом в Γ (т.е. подграфом, в котором степень каждой вершины чётна), который в свою очередь представляется погружением в Γ дизъюнктного объединения окружностей. Рассмотрев связную сумму этих погруженных в Γ окружностей вдоль каких-нибудь путей (последовательно добавляя по одной окружности), мы получим одно погружение $f: S^1 \rightarrow \Gamma$, представляющее α .

Теорема 2.2. *Погружения f, g связного графа Γ в поверхность M регулярно гомотопны, если и только если они соединяются гомотопией h_t , такой что:*

- (1) *f и g задают одинаковый циклический порядок рёбер в каждой вершине Γ относительно некоторых локальных ориентаций M в образах этой вершины, согласованных относительно h_t ;*

- (2) для всякого опорного цикла C , такого что $\nu(f|_C)$ ориентируемо, $T(f|_C, \Xi_f) = T(g|_C, \Xi_g)$ для некоторых оснащений Ξ_f, Ξ_g , совмещаемых $h_t|_C$;
- (3) для одного опорного цикла Z , такого что $\nu(f|_Z)$ неориентируемо, $s(f|_Z) = s(g|_Z)$ (если такой цикл существует), а для остальных опорных циклов C , таких что $\nu(f|_C)$ неориентируемо, $T(f\varphi_C, \Xi_f) = T(g\varphi_C, \Xi_g)$, где φ_C — какое-нибудь погружение из S^1 в Γ , представляющее $[C] + [Z] \in H_1(\Gamma; \mathbb{Z}/2)$, а Ξ_f, Ξ_g — какие-нибудь оснащения, совмещаемые $h_t\varphi_C$.

Доказательство. Если цикл Z существует, пусть v — какая-нибудь его вершина. Используя заданную гомотопию, легко постороить регулярную гомотопию от f к f' , совпадающему с g на v и гомотопному g , оставляя неподвижной v . Заметим, что локальные ориентации, перенесённые из $f(v)$ в $g(v) = f'(v)$ исходной гомотопией и построенной регулярной гомотопией совпадают. Теперь совместим регулярной гомотопией, неподвижной на v , погружения $f'|_Z$ и $g|_Z$, используя теорему 1.9. Построенная регулярная гомотопия продолжается до регулярной гомотопии всего графа Γ между f' и погружением f'' , совпадающим с g на Z . При этом f'' гомотопно g , оставляя неподвижной v .

Далее совместим регулярной гомотопией ограничения f'' и g на малую окрестность Z в Γ , используя условие (1), а после этого совместим также и их ограничения на малую окрестность T в Γ , используя условие (1) и ведя индукцию по какому-нибудь симплициальному сдавливанию дерева T на его поддерево $T \cap Z$. (Проблем с совпадением локальных ориентаций в вершинах не возникает, поскольку все они переносятся по дереву T из вершины v . Каждый шаг индуктивного процесса совмещения основан на том, что два погружения отрезка $[0, 1]$, совпадающие на $[0, \epsilon]$, регулярно гомотопны, оставляя неподвижным $[0, \epsilon]$. При этом лишние завитки выталкиваются из отрезка через точку 1.) Это даёт погружение f''' , регулярное гомотопное f и совпадающее с g на некоторой окрестности $T \cup Z$. Если же цикла Z не существует, то аналогично строится f''' , регулярное гомотопное f и совпадающее с g на некоторой окрестности T . В обоих случаях ясно, что f''' гомотопно g , оставляя неподвижной некоторую окрестность T .

Рассмотрим теперь какой-нибудь опорный цикл C , отличный от Z . Он задаётся ребром E , не входящим в T , причём f''' уже совпадает с g на $C \setminus J$, где J — некоторая замкнутая дуга во внутренности ребра E . Если $\nu(f|_C)$ ориентируемо, по следствию 1.3 существует регулярная гомотопия между $f'''|_C$ и $g|_C$, неподвижная вне J . (Проблем с оснащениями не возникает, поскольку они задаются локальными ориентациями в вершинах графа, которые уже совпали.) Если $\nu(f|_C)$ неориентируемо, по тому же следствию 1.3 существует регулярная гомотопия между $f''' \varphi_C$ и $g \varphi_C$, неподвижная вне $\varphi^{-1}(J)$. Но это то же самое, что и регулярная гомотопия ребра E с носителем в J . Поскольку построенные регулярные гомотопии имеют непересекающиеся замкнутые носители, их одновременное применение даёт требуемую регулярную гомотопию между f''' и g . \square

Замечание 2.3. Из доказательств теорем 1.2, 1.9 и 2.2 ясно, что построенные в них регулярные гомотопии гомотопны (оставляя неподвижными верхнее и нижнее основания цилиндра) заданной гомотопии между f и g .

2.1. Классификация. Покажем, как из теоремы 2.2 извлечь полный (но неканоничный) инвариант погружений $\Gamma \rightarrow M$ (без какой-либо дополнительной структуры) и докажем, что все его значения реализуются.

Легко видеть, что произвольный набор циклических порядков рёбер в вершинах реализуется погружением графа во вложенный диск D в M . Все дальнейшие модификации будут производиться только на дополнении к некоторой окрестности T в Γ , так что циклические порядки рёбер в вершинах уже не изменятся, если не менять ориентацию диска D .

Поскольку Γ гомотопически эквивалентен Γ/T , заданный свободный класс гомотопии $\alpha \in [\Gamma, M]$ задаёт (неоднозначно) пунктированное отображение $\Gamma/T \rightarrow M$, где базисная точка M берётся в D . Подправим построенное выше погружение $\Gamma \rightarrow D$ на каждом ребре $\Gamma \setminus T$ так, чтобы реализовать класс соответствующего лепестка букета Γ/T в $\pi_1(M)$. Полученное в результате погружение f реализует α .

Если цикл Z существует, то $s(f|_Z)$ может принимать два значения, и оба они реализуются, т.к. к $f|_Z$ можно добавлять завитки (на ребре Z , не входящем в T).

Мы можем зафиксировать ориентацию o диска D произвольным образом, что автоматически задаст оснащения Ξ^o всех погруженных циклов $f|_C$, для которых $\nu(f|_C)$ ориентируемо, — и вообще всех композиций φf , где $\varphi: S^1 \rightarrow \Gamma$ — погружение, такое что $\nu(\varphi f)$ ориентируемо. Если пара $F := (f, o)$ не гомотопна паре $(f, -o)$ (что, конечно, является свойством гомотопического класса α), то для всякого погружения g , гомотопного f , существует единственная ориентация o_g диска D , такая что пара (f, o) гомотопна паре (g, o_g) . В этом случае корректно (хотя и не канонично) определены целочисленные инварианты $T_F(g|_C) := T(g|_C, \Xi^{o_g})$ и $T_F(\varphi_C g) := T(\varphi_C f, \Xi^{o_g})$, где C — опорный цикл Γ , такой что $\nu(g|_C)$ ориентируемо, а $\varphi_C: S^1 \rightarrow \Gamma$ — погружение как в пункте (3) формулировки теоремы 2.2. Все возможные наборы значений этих инвариантов реализуются, поскольку к погруженным рёбрам $\Gamma \setminus (T \cup Z)$ можно добавлять завитки (независимо для разных рёбер, число которых равно числу рассматриваемых целочисленных инвариантов). По теореме 2.2 комбинация этих целочисленных инвариантов с $s(f|_Z)$ (если цикл Z имеется) и циклическими порядками рёбер в вершинах будет в этом случае полным инвариантом регулярной гомотопии погружений $G \rightarrow M$, причём, как показано выше, этот инвариант сюръективен.

Если же пара $F := (f, o)$ гомотопна паре $(f, -o)$, то инварианты $T_F(g|_C)$ и $T_F(\varphi_C g)$ корректно определены лишь с точностью до одновременной смены знака, при которой также переворачиваются все циклические порядки рёбер в вершинах. (На $s(f|_Z)$ эта смена знака никак не влияет.) Таким образом, набор указанных инвариантов, профакторизованный по одновременной смене знака и дополненный классом $\bmod 2$

вычетов $s(f|_Z)$, является в данном случае полным инвариантом регулярной гомотопии погружений $G \rightarrow M$ (по теореме 2.2), причём все его значения реализуются по тем же соображениям, что и в предыдущем случае.

Пример 2.4. Сравним инварианты нульгомотопных погружений $S^1 \vee S^1$ и $S^1 \sqcup S^1$ в лист Мёбиуса M . Согласно замечанию 1.4(в) и примеру 1.5(а) нульгомотопные погружения $f: S^1 \rightarrow M$ классифицируются $T_+(f)$ — абсолютной величиной числа вращения. Поэтому и для погружений $S^1 \sqcup S^1 \rightarrow M$ можно говорить о числе завитков на каждой окружности, но не имеет смысла говорить об их знаках. Однако для погружений $S^1 \vee S^1 \rightarrow M$ о знаках завитков можно кое-что сказать. Хотя они и не определены как глобальные инварианты, можно говорить о том, одинаковые они или разные на двух окружностях букета (в силу сказанного выше).

Таким образом, некоторые инварианты погруженных графов не сводятся к инвариантам погруженных окружностей — хотя с учётом оснащений такая редукция имеет место (согласно теореме 2.2).

Замечание 2.5. Исходной мотивировкой данной работы было упрощение варианта теоремы 2.2, полученного в [2]. Замечание 1.4 и §2.1 продолжают это упрощение на главу 3 диссертации [3], не вошедшую в статью [2]. В работе [1] приводится другое доказательство теоремы 2.2 в случае, когда $M = \mathbb{R}P^2$, а Γ — букет окружностей.

3. СГЛАЖИВАНИЕ ПОГРУЖЕНИЙ

Лемма 3.1. *Всякое вложение $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ переводится в гладкое вложение изотопией \mathbb{R}^2 с носителем в заданной окрестности $f(I)$.*

Доказательство. Если заменить “гладкое” на “кусочно-линейное”, то это — известная теорема Шёнфлиса и Антуана (см. [9; Theorem 10.8] и [8; Theorem 4.3], а также ссылки там; наиболее простое доказательство получается по аналогии с [5; proof of Theorem III.6.A]). Но кусочно-линейную дугу несложно сгладить изотопией \mathbb{R}^2 с носителем в заданной окрестности дуги. \square

Лемма 3.2. *Всякое вложение $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $f|_{[-2, -1] \cup [1, 2]}$ — гладкое вложение, изотопно гладкому вложению изотопией с носителем в $[-1, 1]$.*

Под *изотопией* здесь понимается гомотопия в классе вложений. Доказательство не даёт изотопии \mathbb{R}^2 , накрывающей изотопию отрезка, но зато оно просто.

Доказательство. Пусть $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — стандартное включение на отрезок $[-2, 2]$ оси абсцисс, и пусть $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — диффеоморфизм, переводящий $f|_{[-2, -1] \cup [1, 2]}$ в $g|_{[-2, -1] \cup [1, 2]}$ и такой, что $Hf([-1, 1])$ не пересекает лучи $[-\infty, -2]$ и $[2, \infty]$ оси абсцисс. Пусть $h_t: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — коническая изотопия между Hf и g , определённая по формуле $h_t(x) = (1-t)Hf(\frac{x}{1-t})$ при $|x| < 1-t$, а иначе $h_t(x) = g(x)$. Тогда $H^{-1}h_t$ — искомая изотопия. \square

Лемма 3.3. *Всякое вложение f из S^1 в поверхность M регулярно гомотопно гладкому погружению.*

Более того, если f гладко вкладывает некоторую дугу, то регулярную гомотопию можно считать неподвижной на ней.

Доказательство. Первое утверждение сводится ко второму, если рассмотреть дисковую окрестность D какой-нибудь точки $f(S^1)$ в M и достаточно малую дугу $J \subset S^1$, такую что $f(J) \subset D$, и применить к ней лемму 3.1.

Докажем второе утверждение. Пусть $J \subset S^1$ — замкнутая дуга, внутренность которой содержит замыкание дополнения до заданной дуги. Применим лемму 3.2 к поднятию $f|_J$ на универсальное накрытие M (если это плоскость; а если это сфера, выколем из неё точку, не попадающую в образ J). Полученная изотопия проектируется в искомую регулярную гомотопию в M . \square

Теорема 3.4. *Всякое погружение f из S^1 в поверхность M регулярно гомотопно гладкому погружению.*

Причём регулярную гомотопию можно взять неподвижной на заданной точке S^1 или, если ограничение f гладко погружает некоторую дугу, — то на этой дуге.

Доказательство. Пусть задано погружение $f: S^1 \rightarrow M$. В силу компактности S^1 она покрывается конечным числом открытых дуг J_1, \dots, J_m , таких что каждое $f|_{J_i}$ — вложение. Можно считать, что непусты лишь пересечения вида $K_i := J_i \cap J_{i+1}$ (сложение по модулю m). Уменьшая при необходимости дуги K_i , можно считать, что образы их замыканий не пересекаются, и что каждая из них содержится во вложенном диске $D_i \subset M$. Тогда из леммы 3.1 следует, что существует объемлющая изотопия H_t , $H_0 = \text{id}_M$, переводящая каждую вложенную дугу $f(K_i)$ в гладко вложенную дугу $g(K_i)$, где $g = H_1 f$. Рассмотрим замкнутые гладко вложенные дуги L_1, \dots, L_m , не пересекающие друг друга и такие, что каждая L_i трансверсально пересекает $g(K_i)$ в одной точке $g(p_i)$ и не имеет других точек пересечения с $g(S^1)$. Рассмотрим также их дизъюнктные окрестности U_i , гомеоморфные открытому диску и такие, что каждая U_i пересекает $g(S^1)$ по дуге, лежащей в $g(K_i)$. Рассмотрим поверхность $M' = M \setminus (\partial L_1 \cup \dots \cup \partial L_m)$, полученную из M прокалыванием в $2n$ точках, а также её накрытие M'_g , соответствующее подгруппе $\pi_1(M')$, порождённой $[g]$. Покажем, что поднятие \bar{g} погружения g в M'_g является вложением.

Действительно, пусть $\bar{g}(x) = \bar{g}(y)$, где $x \neq y$. Тогда x и y не лежат одновременно ни в какой дуге J_i . Следовательно, найдутся i и j , такие что 0-сфера $\{p_i, p_j\}$ зацеплена с 0-сферой $\{x, y\}$ в S^1 , причём $x, y \notin K_i \cup K_j$. Тогда $z := g(x) = g(y)$ содержится в $N := M' \setminus (U_i \cup U_j)$. Факторпространство M'/N гомотопически эквивалентно букету двух окружностей, причём композиция g с факторотображением $q: M' \rightarrow M'/N$ переводит две дуги I_1, I_2 , на которые x и y разделяют S^1 (с ориентацией, индуцированной из S^1), в петли, представляющие обе образующие группы $\pi_1(M'/N)$. При этом сама эта композиция qg представляет произведение этих образующих. Поэтому её класс порождает подгруппу, не содержащую классов петель $qg|_{I_1}$ и $qg|_{I_2}$. Следовательно, классы петель $g|_{I_1}$ и $g|_{I_2}$ также не лежат в подгруппе $\pi_1(M', z)$, порождённой классом g . Но тогда они не поднимаются в M'_g , что противоречит нашему предположению.

Итак, \bar{g} является вложением. Рассмотрим теперь $M'' = M \setminus H_1^{-1}(\partial L_1 \cup \dots \cup \partial L_m)$, а также её накрытие M_f'' , соответствующее подгруппе $\pi_1(M'')$, порождённой $[f]$. Поднятие \bar{f} погружения f в M_f'' переводится в \bar{g} гомеоморфизмом $M_f'' \rightarrow M_g'$ накрывающих пространств, лежащим над гомеоморфизмом $H_1|_{M''}: M'' \rightarrow M'$ баз, и потому тоже является вложением. Значит, по лемме 3.3 оно соединяется регулярной гомотопией h_t с гладким погружением, причём если f гладко вкладывает некоторую дугу, то h_t неподвижна на ней. Если задана точка $1 \in S^1$, её можно сделать неподвижной, заменив h_t на $\varphi_t^{-1}h_t$, где φ_t — изотопия от тождества к какому-нибудь диффеоморфизму M_f'' , такая что $\varphi_t \bar{f}(1) = h_t(1)$. Но тогда композиция h_t , проекции на M'' и включения $M'' \rightarrow M$ является искомой регулярной гомотопией от f к гладкому погружению. \square

Теорема 3.5. *Если два гладких погружения $f, g: S^1 \rightarrow M$ регулярно гомотопны, то они гладко регулярно гомотопны.*

Более того, гладкая регулярная гомотопия будет неподвижной на заданной точке или дуге, если это выполнено для заданной регулярной гомотопии.

Доказательство. Пусть задана регулярная гомотопия $h_t: S^1 \rightarrow M$ между f и g . В силу компактности цилиндра $S^1 \times I$ он покрывается конечным числом открытых множеств вида $J_i \times I_i$, $i = 1, \dots, m$, таких что для каждого i , при любом $t \in I_i$ отображение $h_t|_{J_i}$ — вложение. Поэтому существует $\varepsilon > 0$, такое что $h_t(x) \neq h_t(x + \delta)$ (сложение в группе S^1) при $\delta < \varepsilon$ и любом $t \in I$. Пусть $e_y: T_y M \rightarrow M$ — экспоненциальное отображение, заданное некоторой полной римановой метрикой на M . Оно инъективно на шаре радиуса $r(y) > 0$ с центром в начале координат, где функция $r(y)$ непрерывна, и следовательно ограничена снизу некоторым $r > 0$ для всех y из образа $S^1 \times I$ (в силу его компактности). Поэтому для достаточно малых δ корректно определён ненулевой касательный вектор $v_t^\delta(x) := e_{h_t(x)}^{-1}(h_t(x + \delta))/\delta$ в точке x . В силу равномерной непрерывности $df_x(1): S^1 \rightarrow TM$ (т.е. ограничения $df: TS^1 \rightarrow TM$ на единичные вектора) функции $v_0^\delta(x)$ равномерно сходятся к $df_x(1)$ при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому при достаточно малых δ линейная гомотопия между $v_0^\delta(x)$ и $df_x(1)$ не задевает начала координат. Зафиксировав такое δ , обозначим $v_t^\delta(x)/\|v_t^\delta(x)\|$ через $\varphi_t(x)$. Тогда $\varphi_t: S^1 \rightarrow SM$ вместе с гомотопией между φ_0 и sf и аналогичной гомотопией между φ_1 и sg задают гомотопию между сферизованными дифференциалами sf и sg , и требуемое утверждение вытекает из h-принципа (см. [4], [11], [12]). Точнее, в случае с неподвижной дугой полученная гладкая регулярная гомотопия будет неподвижна лишь на некоторой точке и на касательном векторе в этой точке, но используя это, несложно сделать её неподвижной и на всей дуге; а в случае с неподвижной точкой мы можем использовать путь $\varphi_t(1)$, чтобы построить диффеотопию G_t многообразия M , неподвижную на $h_0(1)$ и такую, что $sG_t \varphi_t(1) = \varphi_0(1)$. \square

Замечание 3.6. Обобщение теорем 3.4 и 3.5 на гладкие погружения графов (в смысле [10]) предоставляется читателю.

4. БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен П. Ахметьеву, Е. Кудрявцевой и Д. Пермякову за полезные обсуждения. В частности, идея рассмотреть накрытие M_f исходит от Е. Кудрявцевой, а П. Ахметьев и Д. Пермяков указали ошибки в ранних версиях заметки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Ивашковский, *Погружение графов в проективную плоскость*. [arXiv:1611.09634](#).
- [2] Д. А. Пермяков, *Регулярная гомотопность погружений графов в поверхности*, Матем. сб. **207** (2016), 93–112; English transl., D. A. Permyakov, *Regular homotopy for immersions of graphs into surfaces*, Sb. Math. **207** (2016), 854–872.
- [3] ———, *Погружения графов в поверхности*. Диссертация, МГУ, 2016. [ИСТИНА](#).
- [4] M. Adachi, *Embeddings and Immersions*, Transl. Math. Mono. vol. 124, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1993.
- [5] R. H. Bing, *The Geometric Topology of 3-Manifolds*, Colloq. Publ. vol. 40, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1983.
- [6] Yu. Burman and M. Polyak, *Geometry of Whitney-type formulas*, Mosc. Math. J. **3** (2003), no. 3, 823–832, 1197. [Journal](#).
- [7] ———, *Whitney’s formulas for curves on surfaces*, Geom. Dedicata **151** (2011), 97–106. [arXiv:0911.0393](#).
- [8] Л. В. Келдыш, *Топологические вложения в евклидово пространство*, Труды МИАН, vol. 81, 1966; English transl. in *Topological Imbeddings in Euclidean Space*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1968.
- [9] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Grad. Texts in Math. vol. 47, Springer, New York, 1977.
- [10] J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Ann. Math. Studies, vol. 54, Princeton Univ. Press, 1966. Пер. на русский в *Дж. Милнор, Дж. Сталшеф, Характеристические классы*, Мир, М. (1979), стр. 270–359.
- [11] C. Rourke and B. Sanderson, *The compression theorem I*, Geometry and Topology **5** (2001), 399–429. [arXiv:math.GT/9712235](#).
- [12] ———, *The compression theorem III*, Alg. Geom. Topol. **3** (2003), 857–872. [arXiv:math.GT/0301356](#).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН, 119991 МОСКВА, УЛ. ГУБКИНА 8
 E-mail address: melikhov@mi.ras.ru